

**Fallstudien der Mathematischen Modellbildung: Teil 2 (MA 2902)**

THEMEN FÜR HAUSARBEITEN

**Thema 1: MEG/EEG-Bildgebung**

- Diskutieren Sie das Prinzip der MEG/EEG-Bildgebung [1]. Beschreiben Sie das/die lineare(n) Modell(e), und erklären Sie, warum das zugehörige inverse Problem schlecht gestellt ist.
- Diskutieren Sie die folgenden A-prioris für die Quellen, die in [1] vorgestellt werden: Sp1, Sp2, Sp3, Sp4, Te1, Te2. Geben Sie Beispiele für mögliche Regularisierungsfunktionen.
- Welche Regularisierung könnte verwendet werden, um Quellen mit geringer Energie und spärlicher räumlicher Verteilung zu begünstigen (bei festem Zeitraster  $t$ )? Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Lösung des entsprechenden regularisierten Kleinste-Quadrate-Problems.
- Definieren Sie die  $\ell^1/\ell^2$ -Norm, die *e.g.* in der Einführung von [4] beschrieben wird. Kommentieren Sie ihre Verwendung als Regularisierung für das MEG/EEG-Wiederherstellungsproblem.

**Thema 2: Total Least-Squares**

- Definieren und diskutieren Sie das Total-Least-Squares-Problem, das in [3] beschrieben wird. Gehen Sie insbesondere auf die Unterschiede zum gewöhnlichen Least-Squares-Problem.
- Wir verwenden hier die Notationen von [3]. Sei  $C \stackrel{\text{def.}}{=} [A \ B]$  und  $\delta C \stackrel{\text{def.}}{=} [\delta A \ \delta B]$ . Formulieren Sie die Nebenbedingung in (TLS1) in Bezug auf  $C$  und  $\delta C$ . Leiten Sie eine untere Schranke für  $\|\delta C\|_F$  und einen Minimierer  $\delta C_*$  ab, indem Sie den Satz von Eckart-Young verwenden (siehe *e.g.* Lemma 4). Zeigen Sie, dass

$$\text{Ker}(C + \delta C_*) = \text{Ran} \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}.$$

Leiten Sie einen Beweis für Theorem 2 her.

- In [3] heißt es, dass für einen Vektor auf der rechten Seite  $b$  die Lösung  $x_*$  von (TLS1)

$$(A^\top A - \sigma_{n+1}^2 I)x_* = A^\top b, \tag{1}$$

erfüllt, wobei  $\sigma_{n+1}$  der letzte Singulärwert von  $C$  ist. Vergleichen Sie mit den Normalgleichungen für ein gewöhnliches Least-Squares-Problem. Was können Sie über die Kondition von TLS im Vergleich zu LS ableiten? Geben Sie die Lagrange-Funktion des (TLS1) Problems an. Wie könnte eine Strategie zur Ableitung von (1) aussehen?

- Erklären Sie das inverse Problem, das in [2] behandelt wird, und warum TLS in diesem Fall nützlich sein kann.

## References

- [1] H. Becker, L. Albera, P. Comon, R. Gribonval, F. Wendling, and I. Merlet. Brain-source imaging: from sparse to tensor models. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 32(6):100–112, 2015.
- [2] N. Bose, H. Kim, and H. Valenzuela. Recursive total least-squares algorithm for image reconstruction from noisy, undersampled frames. *Mult. Sys. Sig. Proc.*, 4:253–268, 1993.
- [3] I. Markovsky and S. Van Huffel. Overview of total least-squares methods. *Sig. Proc.*, 87(10):2283–2302, 2007.
- [4] W. Ou, P. Golland, and M. Hämmäläinen. A distributed spatio-temporal EEG/MEG inverse solver. *Med. Ima. Comput. Comput. Assist. Interv. (MICCAI)*, 11(1):26–34, 2008.